

Carrés magiques

Le carré magique

Un carré magique d'ordre N est composé par $N \times N$ entiers strictement positifs et tous différents, disposés sur un tableau carré de sorte que leurs sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale (ayant N éléments) soient égales. On nomme *constante magique* la valeur de ces sommes. Pour plus d'informations, regarder la page [wikipedia](#) dédiée aux carrés magiques.

Notre modèle linéaire

On travaillera sur un modèle linéaire ayant comme solution, pour une constante magique donnée, le carré magique capable de satisfaire aussi des contraintes supplémentaires.

Soit N la taille de notre carré; soit v la valeur de la constante magique.

Soit $L = \{1, 2, \dots, N \times N\}$ la liste de valeurs entières qui peuvent apparaître une et une seule fois dans le carré. L'ensemble de variables de notre problème sera modélisé par un tableau de booléens x à 3 dimensions tel que:

$$\begin{aligned} x(i, j, k) &= 1 && \text{si la valeur entière } k \text{ est affectée à la case } (i, j) \text{ du carré,} \\ x(i, j, k) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Tout carré magique doit satisfaire les contraintes suivantes (à priori, notre modèle n'a pas de fonction objectif):

1. chaque case du carré peut contenir un seul entier:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \sum_{k \in L} x(i, j, k) = 1$$

2. chaque valeur entière peut apparaître une seule fois dans le carré:

$$\forall k \in L \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x(i, j, k) = 1$$

3. la somme des valeurs affectées à chaque case (i, j) de la même ligne doit être égale à v :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{k \in L} kx(i, j, k) = v$$

4. la somme des valeurs affectées à chaque case (i, j) de la même colonne doit être égale à v :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k \in L} kx(i, j, k) = v$$

5. la somme des valeurs affectées aux cases de la diagonale principale doit être égale à v :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k \in L} kx(i, i, k) = v$$

6. la somme des valeurs affectées aux cases de la diagonale secondaire doit être égale à v :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k \in L} kx(N - i + 1, i, k) = v$$

Exercice 1

Récupérer le fichier `CarreMagiqueAmpl.tar.gz`, qui contient le modèle en langage AMPL, ainsi que le fichier `run` correspondant. Lancer l'exécution et remplir le tableau ci-dessous avec la solution que vous trouvez:

Exercice 2

On souhaite ajouter au modèle la contrainte suivante:

- la somme des valeurs affectées aux cases $(1, 1)$ et $(2, 2)$ doit être égal à $\frac{v}{2}$.

En langage mathématique, on peut écrire la contrainte comme il suit:

$$\sum_{k \in L} kx(1, 1, k) + \sum_{k \in L} kx(2, 2, k) = \frac{v}{2}.$$

Modifier le fichier qui contient le modèle pour y ajouter cette contrainte. Écrire ci-dessous le texte que vous allez ajouter au modèle (langage AMPL):

Écrire la nouvelle solution, que vous avez trouvée, dans ce tableau:

Exercice 4

On souhaite maintenant ajouter au modèle une fonction objectif qui maximise la somme des valeurs affectées aux cases (1, 3), (2, 2) et (3, 1). Écrire ci-dessous la fonction en langage mathématique:

Modifier le fichier qui contient le modèle pour y ajouter la fonction. Écrire ci-dessous le texte que vous allez ajouter au modèle (langage AMPL):

Écrire la nouvelle solution, que vous avez trouvée, dans ce tableau:
